14 - лекция. Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

14- лекция

14.1 Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің негізгі түрлері және оны шешу әдістері

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі түрлерін қарастырамыз:

1) $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ (1) –

бұл дифференциалдық теңдеудің құрамына ізделініп отырған y функциясы мен оның (k-1)-ретке дейінгі туындылары кірмейді. Бұл жағдайда, ретін төмендету мына ауыстыру көмегімен жүзеге асырылады:

$$y^{(k)} = z, y^{(k+1)} = z', ..., y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

18.1 мысал. $y''' - y'' = 0 \Rightarrow |y'' = z, y''' = z'| \Rightarrow z' - z = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = C_1 e^{\int dx} = C_1 e^x \Rightarrow y'' = C_1 e^x \Rightarrow y' = \int C_1 e^x dx + C_2 = C_1 e^x + C_2 \Rightarrow$$

$$y = \int [C_1 e^x + C_2] dx \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$$

2) $F(y \ , y', ..., y^{(n)}) = 0$ (2)

Жоғарғы ретті бұл теңдеудің түріне тәуелсіз айнымалы x кірмейді. Бұл жағдайда мынадай белгілеу енгіземіз: $y' = \frac{dy}{dx} = p$. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесін қолданып, мына теңдіктерді аламыз:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dy} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}, ... \quad .$$

Дәл осылай, одан да жоғарғы ретті туындыларын тауып, орнына қойсақ $y^{(k)}$ туындылары *p=p(y)* функциясының y-тен тәуелді *k-1* реттен аспайтын туындылары арқылы өрнектелетіні анық, бұл теңндеудің иретін бір санға келтіруге мүмкіндік тудырады. Бұл жағдайды мысал көмегімен қарастырып көрелік.

18.2 мысал. $yy'' - (y')^2 = y'$ теңдеуін шешіңіз.

Жаңа функция енгіземіз: $y' = p$; $y'' = p'_y \cdot p$, онда

$$ypp' - p^2 = p \Rightarrow p' - \frac{1}{y}p = \frac{1}{y} \Rightarrow p = e^{\int \frac{dy}{y}} \cdot \left(C_1 + \int \frac{1}{y} \cdot e^{-\int \frac{dy}{y}} dy\right) =$$

$$= y\left(C_1 + \int \frac{dy}{y^2}\right) = y\left(C_1 - \frac{1}{y}\right) = C_1 y - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{C_1 y - 1} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1} \cdot \ln|C_1 y - 1| = x + C_2 .$$

3) $y^{(n)} = f(x)$

түріндегі, яғни, оң жағы тек х айнымалысына ғана тәуелді болатын дифференциалдық теңдеуді қарастырайық.

Онда $y = \int\int ... \int f(x) dx dx ... dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1} x + C_n$ - теңдеудің жалпы шешімі.

14 - лекция. Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

18.3 мысал, $xy''' = 2x + 3$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі: Алдымен теңдеуді (1) түріне келтіреміз:

$$y''' = \frac{2x+3}{x}$$

(2) формулаға сәйкес біртіндеп интегралдасақ:

$$y'' = \int \frac{2x+3}{x}dx = \int \left(2 + \frac{3}{x}\right)dx = 2x + 3\,ln\,x + C_1,$$

$$y' = \int \left(2x + 3\ln x + C_1\right)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx,\ v = x_1 \end{matrix} \right| = x^2 + 3x\ln x - 3x + Cx_1 + C_2.$$

$$y = \int \left(x^2 + 3x\ln x - 3x + +Cx_1 + C_2\right)dx = \frac{x^3}{3} + 3\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}\right) - \frac{3x^2}{2} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\ln x + \overline{C_1}\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3, \text{ мұндағы}$$

$$\overline{C_1} = \frac{C_1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2}.$$

14.2 Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

1. Теңдеулер шешімінің жалпы құрылымы

Анықтама. n - ші ретті сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеу деп мына түрдегі теңдеуді айтамыз:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (1)$$

мұндағы $a_i = a_i(x),\ i = \overline{1,n}$ теңдеудің коэффиценттері, қандай да кесіндіде үзіліссіз функциялар.

Теңдеудің оң жағы $L[y] \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny$ сызықты оператор деп аталады. $L[y_1 \pm y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2]$ және $L[Cy] \equiv CL[y]$ теңдігі орындалатынына оңай көз жеткізуге болады, $C - const$.

Теорема 1. (Пикар). Қандай да бір D облысының барлық нүктелерінде үзіліссіз болатын $a_i = a_i(x),\ i = \overline{1,n}$ және $f(x)$ функциялары үшін (1) Коши есебінің тек жалғыз ғана шешімі табылады.

Ары қарай, біз $a_i = a_i(x),\ i = \overline{1,n}$ және $f(x)$ функцияларын D облысында үзіліссіз деп қарастырамыз.

1. Сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

$$L[y] = 0 \qquad (2)$$

Анықтама. $y_1, y_2, ..., y_m$ функциялары $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелді деп аталады, егер төмендегі теңдеуді қанағаттандыратын барлығы бірдей нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, тұрақтылары табылатын болса:

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_my_m = 0\ , \qquad \forall x \in (a;b)$$

кері жағдайда, сызықты тәуелсіз деп аталады.

18.4 мысал.а) $y_1 = x,\quad y_2 = x^2,\quad y_3 = 3x,\quad y_4 = 2x - x^2$ - функциялары $(-\infty;\infty)$ аралығында сызықты тәуелді, себебі:

1) $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0 \Rightarrow -3y_1 + 0\cdot y_2 + y_3 + 0\cdot y_4 = -3y_1 + y_3 = -3x + 3x \equiv 0 \Rightarrow y_3 = 3y_1,$

14 - лекция. Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

2) $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1 \Rightarrow -2y_1 + y_2 + y_4 = -2x + x^2 + \left(2x - x^2\right) \equiv 0 \Rightarrow y_4 = 2y_1 - y_2$.

б) $1,\ x,\ x^2$ функциялары $(-\infty;\infty)$ аралығында сызықты тәуелсіз, себебі $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0$ теңдігі барлық x үшін емес, тек x-тің екі мәні үшін ғана орынды.

Сызықты тәуелді $y_1, y_2, ..., y_n$ функцияларының $(n-1)$ - ші ретке дейінгі туындылары бар болса, онда олар Вронский анықтауышы деп аталатын:

$$W[y_1; y_2; \ldots; y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

анықтауыш көмегімен анықталады.

Теорема 2. Егер $y_1, y_2, ..., y_n$ функциялары $(a;b)$, аралығында сызықты тәуелді болса, онда осы $(a;b)$ аралығында $W[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv 0$.

Теорема 3. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1, y_2, ..., y_n$ $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелсіз функциялар болса, онда $\forall x \in (a\ ;\ b)$: $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$.

Анықтама. Кез келген (2) теңдеуінің n сызықты тәуелсіз дербес шешімдер жүйесі фундаментальдық шешімдер жүйесі деп аталады.

Теорема 4. (2) дифференциалдық теңдеуінің әрқашанда фундаменталдық шешімдер жүйесі табылады.

Теорема 5. Егер $y_1, y_2, ..., y_n$ - (2) теңдеуінің дербес шешімдері болса, онда

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3)$$

мұндағы C_i, $i = \overline{1,n}$ - кез келген тұрақтылар және бұл да (2) теңдеуінің шешімі болады.

(3) шешімінде n тұрақты бар. Қандай шарт орындалғанда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Теорема 6. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1, y_2, ..., y_n$ фундаменталдық шешімдер жүйесін құраса, онда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

18.5 мысал. e^x, e^{-x}, e^{2x} функциялар жүйесі $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ теңдеуінің фундаментальдық шешімдер жүйесі болатынын көрсет және оның жалпы шешімін жаз.

Шешуі: $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{2x}$ функциялары мен оның туындыларын берілген теңдеуге қою арқылы олар теңдеудің шешімі болатынына көз жеткізуге болады. Оның вронскианы:

$$W\left(e^x, e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0.$$

Ендеше, e^x, e^{-x}, e^{2x} сызықты тәуелсіз функциялар және берілген теңдеудің фундаментальдық шешімдер жүйесін құрайды. Оның жалпы шешімі (4) формуласына сәйкес:

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

18.6 мысал. Егер $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x + 1$ теңдеуінің дербес шешімдерінің біреуі $y^* = x + 1$ функциясы болса, онда оның жалпы шешімін жазыңыз.

Шешуі: Сәйкес біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімі $\tilde{y}$ 2-мысалда табылған, онда теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + x + 1.$$

14 - лекция. Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі.

Дайындаған: Ақпараттық технологиялар және интеллектуалды жүйелер мектебінің аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

14.3. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі

Теорема 7. (1) теңдеуінің жалпы шешімі осы теңдеудің дербес шешімі мен оған сәйкес (2) біртекті теңдеуінің жалпы шешімінің қосындысына тең.

Ендеше, (1) теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін :

1) (2) біртекті теңдеуінің жалпы шешімін,
2) (1) теңдеуінің дербес шешімін

табу қажетті.

Тұрақты шаманы вариациялау әдісі (2) теңдеуінің жалпы шешімі белгілі болғанда (1) теңдеуінің дербес шешімін табу үшін қолданылады.

(3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болсын. (1) теңдеуінің дербес шешімін (3) түрінде іздейміз, C_i, $i=\overline{1,n}$ -ді x-ке тәуелді белгісіз функция деп қарастырамыз. Шешімді табу үшін n шарт қажет. Осы шарттар ретінде мына $(n-1)$ шарт

$$y^{(i)} = C_1 y_1^{(i)} + C_2 y_2^{(i)} + \ldots + C_n y_n^{(i)}, \quad i=\overline{1,n-1} \tag{4}$$

пен (1) теңдеуін (3) қанағаттандыратын шартты аламыз. (4)-тен $y^{(i)}$ -ді, мұндағы $i=\overline{1,n-1}$, анықтайтын өрнекте C_i, $i=\overline{1,n}$ функциясының туындысы болмауы қажет екенін көруге болады. $C_i(x)$ мынадай жүйе көмегімен анықталады:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}, \tag{5}$$

бұл n белгісіз C_i'-ке тәуелді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі. Теңдеулер жүйесінің анықтауышы фундаменталдық шешімдер жүйесі $y_i(x)$ нөлден өзгеше болатын жағдайдағы Вронский анықтауышы. Сондықтан, (5) жүйесінің тек бір ғана шешімі бар: $C_i'(x) = \varphi_i(x)$. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу болатын соңғы теңдіктің екі жағын да интегралдап, $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$ табамыз.

Сонымен, (1) теңдеуінің дербес шешімі:

$$y^* = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + \ldots + y_n \int \varphi_n(x). \tag{6}$$

Әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2009г.
3. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1,2,3 бөлім Бастау, 2008
4 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2002г.